Koordinaten des Höhenschnittpunkts:

Die Höhen eines Dreiecks ABC schneiden einander in einem Punkt S(Sx;Sy).

Die Koordinaten Sx und Sy errechnen sich unter Heranziehung der Koordinaten der Dreieckspunkte A(Ax;Ay), B(Bx;By) und C(Cx;Cy) wie folgt:

Sx=
((By-Ay)*Cy^2+((Bx-Ax)*Cx-By^2+Ay^2)*Cy+(Ax*Ay-Bx*By)*Cx+Ay*By^2+(Ax*Bx-Ay^2)*By-Ax*Ay*Bx)/
((Bx-Ax)*Cy+(Ay-By)*Cx+Ax*By-Ay*Bx)

oder

$$S_X = \frac{(B_Y - A_Y)\cdot C_Y^2 + ((B_X - A_X)\cdot C_X - B_Y^2 + A_Y^2)\cdot C_Y + (A_X \cdot A_Y - B_X \cdot B_Y)\cdot C_X + A_Y \cdot B_Y^2 + (A_X \cdot B_X - A_Y^2)\cdot B_Y - A_X \cdot A_Y \cdot B_X}{(B_X - A_X)\cdot C_Y + (A_Y - B_Y)\cdot C_X + A_X \cdot B_Y - A_Y \cdot B_X}$$

und

Sy=-
(((By-Ay)*Cx-Bx*By+Ax*Ay)*Cy+(Bx-Ax)*Cx^2+(Ax^2-Bx^2)*Cx+(Ay*Bx-Ax*Ay)*By+Ax*Bx^2-Ax^2*Bx)/
((Bx-Ax)*Cy+(Ay-By)*Cx+Ax*By-Ay*Bx)

oder

$$S_Y = -\frac{((B_Y - A_Y)\cdot C_X - B_X \cdot B_Y + A_X \cdot A_Y)\cdot C_Y + (B_X - A_X)\cdot C_X^2 + (A_X^2 - B_X^2)\cdot C_X + (A_Y \cdot B_X - A_X \cdot A_Y)\cdot B_Y + A_X \cdot B_X^2 - A_X^2 \cdot B_X}{(B_X - A_X)\cdot C_Y + (A_Y - B_Y)\cdot C_X + A_X \cdot B_Y - A_Y \cdot B_X}$$

Bei der Gleichung nach S_Y das vorangestellte Minuszeichen nicht übersehen!

Der Nenner in beiden Gleichungen ist identisch. Also sind S_X und S_Y immer dann nicht definiert, wenn der Nenner gleich Null ist:

$$(B_X - A_X)\cdot C_Y + (A_Y - B_Y)\cdot C_X + A_X \cdot B_Y - A_Y \cdot B_X = 0$$

Dieser Fall tritt ein, wenn 2 Dreieckspunkte identisch sind, es sich also überhaupt nicht um ein Dreieck handelt.

Herleitung der Formeln:

Aufgabenstellung:
Herstellung einer Relation zwischen den Dreiecks- (A_X, A_Y, B_X, B_Y, C_X und C_Y) und den Schnittpunktkoordinaten (S_X und S_Y).

Höhe von A nach a:

Gleichung (1a):

Da die Höhe h_A und die gegenüberliegende Dreiecksseite a definitionsgemäß einen rechten Winkel bilden (orthogonal aufeinander stehen), ist das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{h_A}$ und $\vec{a}$ gleich Null:

$$\vec{h_A} \cdot \vec{a} = 0$$

Der Vektor $\vec{h_A}$ hat zwar nur die Länge der Strecke von S nach A, erreicht also nicht die Seite a, da Vektoren aber in der Ebene beliebig parallel und gleichgerichtet verschoben werden können, ohne ihre Identität zu ändern, ist obige Gleichung gleichwohl zutreffend.

Unter Heranziehung der Formel zur Berechnung des Skalarprodukts aus den Koordinaten der Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_X \cdot b_X + a_Y \cdot b_Y$$

folgt **(1a)** $h_{AX} \cdot a_X + h_{AY} \cdot a_Y = 0$

Um diese 4 (unerwünschten) Variablen zu eliminieren, werden 4 weitere Gleichungen (2a) bis (5a) benötigt, die einerseits diese 4 Variablen, andererseits auch die 6 Dreieckskoordinaten und die 2 Schnittpunktkoordinaten beinhalten.

Gleichungen (2a) und (3a):

Es ist eine Vektorengleichung aufzustellen, an der der Vektor $\vec{h}_A$ beteiligt ist. Hierzu wird das Dreieck -S-A („0“ ist der Koordinatennullpunkt) herangezogen. Um den Vektor vom Nullpunkt nach A zu erhalten, sind der Vektor vom Nullpunkt nach S und der Vektor $\vec{h}_A$ zu addieren:

$$\vec{S} + \vec{h}_A = \vec{A} \implies \vec{h}_A = \vec{A} - \vec{S}$$

$$\implies \textbf{(2a)}\ \ h_{AX} = A_X - S_X$$

$$\implies \textbf{(3a)}\ \ h_{AY} = A_Y - S_Y$$

Gleichungen (4a) und (5a):

Es ist eine Vektorengleichung aufzustellen, an der der Vektor $\vec{a}$ beteiligt ist. Hierzu wird das Dreieck 0- B-C („0“ ist der Koordinatennullpunkt) herangezogen. Um den Vektor vom Nullpunkt nach C zu erhalten, sind der Vektor vom Nullpunkt nach B und der Vektor $\vec{a}$ zu addieren:

$$\vec{B} + \vec{a} = \vec{C} \implies \vec{a} = \vec{C} - \vec{B}$$

$$\implies \textbf{(4a)}\ \ a_X = C_X - B_X$$

$$\implies \textbf{(5a)}\ \ a_Y = C_Y - B_Y$$

Kombination der Gleichungen (1a) bis (5a) ==> Gleichungen (6a) und (7a):

$$h_{AX} \cdot a_X + h_{AY} \cdot a_Y = 0 \implies (A_X - S_X)\cdot(C_X - B_X) + (A_Y - S_Y)\cdot(C_Y - B_Y) = 0$$

Auflösung nach S_X:

$$(A_X - S_X)\cdot(C_X - B_X) = -(A_Y - S_Y)\cdot(C_Y - B_Y)$$

$$\implies A_X \cdot C_X - A_X \cdot B_X - S_X \cdot C_X + S_X \cdot B_X = -(A_Y - S_Y)\cdot(C_Y - B_Y)$$

$$\implies A_X \cdot (C_X - B_X) - S_X \cdot (C_X - B_X) = -(A_Y - S_Y)\cdot(C_Y - B_Y) \implies A_X - S_X = -\frac{(A_Y - S_Y)\cdot(C_Y - B_Y)}{C_X - B_X}$$

$$\implies \textbf{(6a)}\ \ S_X = A_X + \frac{(A_Y - S_Y)\cdot(C_Y - B_Y)}{C_X - B_X}$$

Auflösung nach S_Y:

$$(A_Y - S_Y)\cdot(C_Y - B_Y) = -(A_X - S_X)\cdot(C_X - B_X)$$

$$\implies A_Y \cdot C_Y - A_Y \cdot B_Y - S_Y \cdot C_Y + S_Y \cdot B_Y = -(A_X - S_X)\cdot(C_X - B_X)$$

$$\implies A_Y \cdot (C_Y - B_Y) - S_Y \cdot (C_Y - B_Y) = -(A_X - S_X)\cdot(C_X - B_X) \implies A_Y - S_Y = -\frac{(A_X - S_X)\cdot(C_X - B_X)}{C_Y - B_Y}$$

$$\implies \textbf{(7a)}\ \ S_Y = A_Y + \frac{(A_X - S_X)\cdot(C_X - B_X)}{C_Y - B_Y}$$

Exkurs – alternative Berechnung:

Es sind für die Dreiecksseite a und anschließend für die Höhe h_A lineare Gleichungen aufzustellen.

Die allgemeine Form der linearen Gleichung lautet: $y = mx + n$.

Für die Dreiecksseite a mit den Punkten $B(B_X; B_Y)$ und $C(C_X; C_Y)$ gilt demzufolge:

$$B_Y = mB_X + n \implies n = B_Y - mB_X$$
$$C_Y = mC_X + n \implies n = C_Y - mC_X$$
$$\implies B_Y - mB_X = C_Y - mC_X \implies B_Y - C_Y = mB_X - mC_X \implies m = \frac{B_Y - C_Y}{B_X - C_X}$$

Die Gleichung der Dreiecksseite a lautet also $y = \frac{B_Y - C_Y}{B_X - C_X} \cdot x + n$

Die Größe n muss hier nicht ermittelt werden.

Für die Steigungen m_1 und m_2 zweier senkrecht aufeinander stehender (orthogonaler) Geraden gilt (http://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Funktion):

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Die Gleichung der Höhe h_A lautet daher $y = -\frac{B_X - C_X}{B_Y - C_Y} \cdot x + n$ oder $y = \frac{B_X - C_X}{C_Y - B_Y} \cdot x + n$

Da der Dreieckspunkt $A(A_X; A_Y)$ auf der Höhe h_A liegt, kann die Größe n wie folgt berechnet werden:

$$A_Y = \frac{B_X - C_X}{C_Y - B_Y} \cdot A_X + n \implies n = A_Y - \frac{B_X - C_X}{C_Y - B_Y} \cdot A_X$$

Die vollständige Gleichung der Höhe h_A lautet daher:

$$y = \frac{B_X - C_X}{C_Y - B_Y} \cdot x + A_Y - \frac{B_X - C_X}{C_Y - B_Y} \cdot A_X \implies y = A_Y + \frac{(B_X - C_X) \cdot x - (B_X - C_X) \cdot A_X}{C_Y - B_Y}$$

$$\implies y = A_Y + \frac{(B_X - C_X) \cdot (x - A_X)}{C_Y - B_Y} \implies y = A_Y + \frac{(A_X - x) \cdot (C_X - B_X)}{C_Y - B_Y}$$

Wenn man nun noch y durch S_Y und x durch S_X ersetzt, erhält man die obige Gleichung

$$\textbf{(7a)} \quad S_Y = A_Y + \frac{(A_X - S_X) \cdot (C_X - B_X)}{C_Y - B_Y}$$

womit bewiesen wäre, dass beide Rechenwege zum gleichen Resultat des Höhenschnittpunkts führen.

Fortsetzung nach Exkurs:

Da bislang erst eine Höhe untersucht wurde, sind S_X und S_Y genau genommen noch keine Schnittpunktkoordinaten, sondern nur die Koordinaten des dem Punkt A gegenüberliegenden Endes einer beliebigen Strecke $\overline{AS}$ auf der Höhe h_A. Um die gesuchten Schnittpunktkoordinaten zu ermitteln, benötigt man eine weitere Dreieckshöhe.

<u>Höhe von B nach b:</u>

Gleichung (1b):

Da die Höhe h_B und die gegenüberliegende Dreiecksseite a definitionsgemäß einen rechten Winkel bilden (orthogonal aufeinander stehen), ist das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{h}_B$ und $\vec{b}$ gleich Null:

$$\vec{h}_B \cdot \vec{b} = 0$$

Der Vektor $\vec{h}_B$ hat zwar nur die Länge der Strecke von S nach B, erreicht also nicht die Seite b, da Vektoren aber in der Ebene beliebig parallel und gleichgerichtet verschoben werden können, ohne ihre Identität zu ändern, ist obige Gleichung gleichwohl zutreffend.

Unter Heranziehung der Formel zur Berechnung des Skalarprodukts aus den Koordinaten der Vektoren

$$[\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_X \cdot b_X + a_Y \cdot b_Y\ ]$$

folgt **(1b)** $h_{BX} \cdot b_X + h_{BY} \cdot b_Y = 0$

Um diese 4 (unerwünschten) Variablen zu eliminieren, werden 4 weitere Gleichungen (2b) bis (5b) benötigt, die einerseits diese 4 Variablen, andererseits auch die 6 Dreieckskoordinaten und die 2 Schnittpunktkoordinaten beinhalten.

Gleichungen (2b) und (3b):

Es ist eine Vektorengleichung aufzustellen, an der der Vektor $\vec{h}_B$ beteiligt ist. Hierzu wird das Dreieck 0-S-B („0" ist der Koordinatennullpunkt) herangezogen. Um den Vektor vom Nullpunkt nach B zu erhalten, sind der Vektor vom Nullpunkt nach S und der Vektor $\vec{h}_B$ zu addieren:

$$\vec{S} + \vec{h}_B = \vec{B} \implies \vec{h}_B = \vec{B} - \vec{S}$$

==> **(2b)** $h_{BX} = B_X - S_X$

==> **(3b)** $h_{BY} = B_Y - S_Y$

Gleichungen (4b) und (5b):

Es ist eine Vektorengleichung aufzustellen, an der der Vektor $\vec{b}$ beteiligt ist. Hierzu wird das Dreieck 0- A-C („0" ist der Koordinatennullpunkt) herangezogen. Um den Vektor vom Nullpunkt nach C zu erhalten, sind der Vektor vom Nullpunkt nach A und der Vektor $\vec{b}$ zu addieren:

$$\vec{A} + \vec{b} = \vec{C} \implies \vec{b} = \vec{C} - \vec{A}$$

==> **(4b)** $b_X = C_X - A_X$

==> **(5b)** $b_Y = C_Y - A_Y$

Kombination der Gleichungen (1b) bis (5b) ==> Gleichungen (6b) und (7b):

$$h_{BX} \cdot b_X + h_{BY} \cdot b_Y = 0 \implies (B_X - S_X) \cdot (C_X - A_X) + (B_Y - S_Y) \cdot (C_Y - A_Y) = 0$$

Auflösung nach S_X:

$$(B_X - S_X) \cdot (C_X - A_X) = -(B_Y - S_Y) \cdot (C_Y - A_Y)$$

$$\implies B_X \cdot C_X - B_X \cdot A_X - S_X \cdot C_X + S_X \cdot A_X = -(B_Y - S_Y) \cdot (C_Y - A_Y)$$

$$\implies B_X \cdot (C_X - A_X) - S_X \cdot (C_X - A_X) = -(B_Y - S_Y) \cdot (C_Y - A_Y) \implies B_X - S_X = -\frac{(B_Y - S_Y) \cdot (C_Y - A_Y)}{C_X - A_X}$$

==> **(6b)** $S_X = B_X + \dfrac{(B_Y - S_Y) \cdot (C_Y - A_Y)}{C_X - A_X}$

Auflösung nach S_Y:

$$(B_Y - S_Y) \cdot (C_Y - A_Y) = -(B_X - S_X) \cdot (C_X - A_X)$$

$$\Longrightarrow B_Y \cdot C_Y - B_Y \cdot A_Y - S_Y \cdot C_Y + S_Y \cdot A_Y = -(B_X - S_X) \cdot (C_X - A_X)$$

$$\Longrightarrow B_Y \cdot (C_Y - A_Y) - S_Y \cdot (C_Y - A_Y) = -(B_X - S_X) \cdot (C_X - A_X) \Longrightarrow B_Y - S_Y = -\frac{(B_X - S_X) \cdot (C_X - A_X)}{C_Y - A_Y}$$

$$\Longrightarrow \textbf{(7b)} \quad S_Y = B_Y + \frac{(B_X - S_X) \cdot (C_X - A_X)}{C_Y - A_Y}$$

<u>Schnittpunkt der beiden Höhen von A nach a und von B nach b:</u>

Gleichungen (8) und (9):

Um die Schnittpunktkoordinaten S_X und S_Y zu erhalten, sind die Lösungen für S_Y in den Gleichungen (7a) und (7b) sowie die Lösungen für S_X in den Gleichungen (6a) und (6b) gleichzusetzen:

$$A_Y + \frac{(A_X - S_X) \cdot (C_X - B_X)}{C_Y - B_Y} = B_Y + \frac{(B_X - S_X) \cdot (C_X - A_X)}{C_Y - A_Y}$$

und

$$A_X + \frac{(A_Y - S_Y) \cdot (C_Y - B_Y)}{C_X - B_X} = B_X + \frac{(B_Y - S_Y) \cdot (C_Y - A_Y)}{C_X - A_X}$$

Das Computeralgebrasystem Maxima (http://maxima.sourceforge.net) errechnet aus diesen Gleichungen wie bereits oben angegeben:

(8)

$$Sx = \frac{(B_Y - A_Y) \cdot C_Y^2 + ((B_X - A_X) \cdot C_X - B_Y^2 + A_Y^2) \cdot C_Y + (A_X \cdot A_Y - B_X \cdot B_Y) \cdot C_X + A_Y \cdot B_Y^2 + (A_X \cdot B_X - A_Y^2) \cdot B_Y - A_X \cdot A_Y \cdot B_X}{(B_X - A_X) \cdot C_Y + (A_Y - B_Y) \cdot C_X + A_X \cdot B_Y - A_Y \cdot B_X}$$

und

(9)

$$Sy = -\frac{((B_Y - A_Y) \cdot C_X - B_X \cdot B_Y + A_X \cdot A_Y) \cdot C_Y + (B_X - A_X) \cdot C_X^2 + (A_X^2 - B_X^2) \cdot C_X + (A_Y \cdot B_X - A_X \cdot A_Y) \cdot B_Y + A_X \cdot B_X^2 - A_X^2 \cdot B_X}{(B_X - A_X) \cdot C_Y + (A_Y - B_Y) \cdot C_X + A_X \cdot B_Y - A_Y \cdot B_X}$$

Um zu beweisen, dass alle drei Dreieckshöhen einen einzigen Schnittpunkt haben, sind auch für die Höhe von C nach c die Gleichungen (1) bis (5) aufzustellen und der/die Schnittpunkt(e) dieser Höhe mit den beiden anderen Höhen zu vergleichen mit dem soeben ermittelten Schnittpunkt dieser beiden anderen Höhen.

<u>Höhe von C nach c:</u>

Gleichung (1c):

Da die Höhe h_C und die gegenüberliegende Dreiecksseite C definitionsgemäß einen rechten Winkel bilden (orthogonal aufeinander stehen), ist das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{h}_C$ und $\vec{c}$ gleich Null:

$$\vec{h}_C \cdot \vec{c} = 0$$

Der Vektor $\vec{h}_C$ hat zwar nur die Länge der Strecke von S nach C, erreicht also nicht die Seite c, da Vektoren aber in der Ebene beliebig parallel und gleichgerichtet verschoben werden können, ohne ihre Identität zu ändern, ist obige Gleichung gleichwohl zutreffend.

Unter Heranziehung der Formel zur Berechnung des Skalarprodukts aus den Koordinaten der Vektoren

$$[\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_X \cdot b_X + a_Y \cdot b_Y\ ]$$

folgt **(1c)** $h_{CX} \cdot c_X + h_{CY} \cdot c_Y = 0$

Um diese 4 (unerwünschten) Variablen zu eliminieren, werden 4 weitere Gleichungen (2c) bis (5c) benötigt, die einerseits diese 4 Variablen, andererseits auch die 6 Dreieckskoordinaten und die 2 Schnittpunktkoordinaten beinhalten.

Gleichungen (2c) und (3c):

Es ist eine Vektorengleichung aufzustellen, an der der Vektor $\vec{h}_C$ beteiligt ist. Hierzu wird das Dreieck 0-S-C („0“ ist der Koordinatennullpunkt) herangezogen. Um den Vektor vom Nullpunkt nach C zu erhalten, sind der Vektor vom Nullpunkt nach S und der Vektor $\vec{h}_C$ zu addieren:

$$\vec{S} + \vec{h}_C = \vec{C} \implies \vec{h}_C = \vec{C} - \vec{S}$$

$$\implies \textbf{(2c)} \quad h_{CX} = C_X - S_X$$

$$\implies \textbf{(3c)} \quad h_{CY} = C_Y - S_Y$$

Gleichungen (4c) und (5c):

Es ist eine Vektorengleichung aufzustellen, an der der Vektor $\vec{c}$ beteiligt ist. Hierzu wird das Dreieck 0- A-B („0“ ist der Koordinatennullpunkt) herangezogen. Um den Vektor vom Nullpunkt nach B zu erhalten, sind der Vektor vom Nullpunkt nach A und der Vektor $\vec{c}$ zu addieren:

$$\vec{A} + \vec{c} = \vec{B} \implies \vec{c} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$\implies \textbf{(4c)} \quad c_X = B_X - A_X$$

$$\implies \textbf{(5c)} \quad c_Y = B_Y - A_Y$$

Kombination der Gleichungen (1c) bis (5c) ==> Gleichungen (6c) und (7c):

$$h_{CX} \cdot c_X + h_{CY} \cdot c_Y = 0 \implies (C_X - S_X) \cdot (B_X - A_X) + (C_Y - S_Y) \cdot (B_Y - A_Y) = 0$$

Auflösung nach S_X:

$$(C_X - S_X) \cdot (B_X - A_X) = -(C_Y - S_Y) \cdot (B_Y - A_Y)$$

$$\implies C_X \cdot B_X - C_X \cdot A_X - S_X \cdot B_X + S_X \cdot A_X = -(C_Y - S_Y) \cdot (B_Y - A_Y)$$

$$\implies C_X \cdot (B_X - A_X) - S_X \cdot (B_X - A_X) = -(C_Y - S_Y) \cdot (B_Y - A_Y) \implies C_X - S_X = -\frac{(C_Y - S_Y) \cdot (B_Y - A_Y)}{B_X - A_X}$$

$$\implies \textbf{(6c)} \quad S_X = C_X + \frac{(C_Y - S_Y) \cdot (B_Y - A_Y)}{B_X - A_X}$$

Auflösung nach S_Y:

$$(C_Y - S_Y) \cdot (B_Y - A_Y) = -(C_X - S_X) \cdot (B_X - A_X)$$

$$\implies C_Y \cdot B_Y - C_Y \cdot A_Y - S_Y \cdot B_Y + S_Y \cdot A_Y = -(C_X - S_X) \cdot (B_X - A_X)$$

$$\implies C_Y \cdot (B_Y - A_Y) - S_Y \cdot (B_Y - A_Y) = -(C_X - S_X) \cdot (B_X - A_X) \implies C_Y - S_Y = -\frac{(C_X - S_X) \cdot (B_X - A_X)}{B_Y - A_Y}$$

$$\implies \textbf{(7c)} \quad S_Y = C_Y + \frac{(C_X - S_X) \cdot (B_X - A_X)}{B_Y - A_Y}$$

<u>Schnittpunkt der beiden Höhen von A nach a und von C nach c:</u>

Gleichungen (8) und (9):

Um die Schnittpunktkoordinaten S_X und S_Y zu erhalten, sind die Lösungen für S_Y in den Gleichungen (7a) und (7c) sowie die Lösungen für S_X in den Gleichungen (6a) und (6c) gleichzusetzen:

$$A_Y + \frac{(A_X - S_X) \cdot (C_X - B_X)}{C_Y - B_Y} = C_Y + \frac{(C_X - S_X) \cdot (B_X - A_X)}{B_Y - A_Y}$$

und

$$A_X + \frac{(A_Y - S_Y) \cdot (C_Y - B_Y)}{C_X - B_X} = C_X + \frac{(C_Y - S_Y) \cdot (B_Y - A_Y)}{B_X - A_X}$$

Das Computeralgebrasystem Maxima (http://maxima.sourceforge.net) errechnet aus diesen Gleichungen erneut wie bereits oben angegeben:

(8)

$$Sx = \frac{(B_Y - A_Y) \cdot C_Y^2 + ((B_X - A_X) \cdot C_X - B_Y^2 + A_Y^2) \cdot C_Y + (A_X \cdot A_Y - B_X \cdot B_Y) \cdot C_X + A_Y \cdot B_Y^2 + (A_X \cdot B_X - A_Y^2) \cdot B_Y - A_X \cdot A_Y \cdot B_X}{(B_X - A_X) \cdot C_Y + (A_Y - B_Y) \cdot C_X + A_X \cdot B_Y - A_Y \cdot B_X}$$

und

(9)

$$Sy = -\frac{((B_Y - A_Y) \cdot C_X - B_X \cdot B_Y + A_X \cdot A_Y) \cdot C_Y + (B_X - A_X) \cdot C_X^2 + (A_X^2 - B_X^2) \cdot C_X + (A_Y \cdot B_X - A_X \cdot A_Y) \cdot B_Y + A_X \cdot B_X^2 - A_X^2 \cdot B_X}{(B_X - A_X) \cdot C_Y + (A_Y - B_Y) \cdot C_X + A_X \cdot B_Y - A_Y \cdot B_X}$$

<u>Schlussfolgerung:</u>

Die beiden Höhen von A nach a und von B nach b haben den gleichen Schnittpunkt wie die beiden Höhen von A nach a und von C nach c.
Demzufolge haben auch die beiden Höhen von B nach b und von C nach c bzw. alle drei Höhen diesen gemeinsamen Schnittpunkt.